ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 44, No. 4, 1983

LA PROPRIETE DE DUNFORD–PETTIS DANS $\mathscr{C}(K, E)$ ET $L^1(E)$

BY
MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

We construct a Banach space E such that E' has the Schur property (hence E' has the Dunford–Pettis property) but such that $\mathscr{C}([0,1], E)$ and $L^1([0,1], E')$ fail the Dunford–Pettis property.

On dit qu'un espace de Banach E possède la propriété de Dunford–Pettis (DP) si pour toute suite (x_n) de E qui converge faiblement vers zéro et toute suite (y_n) de E' qui converge faiblement vers zéro, on a $\lim_n y_n(x_n) = 0$. Il est connu que pour tout espace compact K, $\mathscr{C}(K)$ possède DP, et que pour toute probabilité μ, $L^1(\mu)$ possède DP [1]. C'est donc une question naturelle de savoir si $\mathscr{C}(K, E)$ et $L^1(\mu, E)$ possèdent DP lorsque E possède DP. Le but de ce travail est de montrer qu'il n'en est rien.

L'espace que nous allons construire s'inspire de l'espace de Hagler [2], mais son analyse est beaucoup plus simple. On pose $T = \bigcup_n \{0,1\}^n$. Pour $\varphi \in T$, on pose $|\varphi| = n$ si $\varphi \in \{0,1\}^n$. Pour $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in T$, $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_m) \in T$, on pose $\varphi \leqq \psi$ si $n \leqq m$ et $\varphi_i = \psi_i$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Pour $\varphi \in T$, on pose $T(\varphi) = \{\psi \in T;\ \psi \geqq \varphi\}$. Soit $x \in \mathbf{R}^T$, $x = (x(\varphi))_{\varphi \in T}$. On pose

$$\|x\| = \operatorname{Sup}_n \left(\sum_{|\varphi| = n} \left(\operatorname{Sup}_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'ensemble des $x \in \mathbf{R}^T$ avec $\|x\| < +\infty$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|$, qui contient le sous espace $\mathbf{R}^{(T)}$ de $\mathbf{R}^T$ consistant des éléments à support fini. On désigne par E l'adhérence de $\mathbf{R}^{(T)}$ dans $\mathbf{R}^T$.

THÉORÈME 1. *Soit (x_m) une suite de E telle que $0 < \delta \leqq \operatorname{Inf} \|x_m\| \leqq \operatorname{Sup} \|x_m\| \leqq a$ et que pour tout $\varphi \in T$ on ait $x_m(\varphi) \to 0$. Alors la suite (x_n) contient une sous-suite équivalente à la base canonique de $c_0 = c_0(\mathbf{N})$.*

Received January 31, 1982 and in revised form October 11, 1982

PREUVE. Tout d'abord par extraction de sous-suite et par un argument standard d'approximation, on peut supposer qu'il existe une suite croissante d'entiers $k(m)$ telle que $x_m(\varphi)=0$ pour $|\varphi|<k(m-1)$ ou $|\varphi|\geqq k(m)$.

Pour $\varphi\in T$, posons $t(\varphi,m)=\operatorname{Sup}_{\psi\in T(\varphi)}|x_m(\psi)|$. On a par hypothèse, pour tout n et m

$$\sum_{|\varphi|=n} t^2(\varphi,m)\leqq a^2.$$

Par induction sur p, on va construire des entiers $m_1,\cdots,m_p$, et des parties infinies N_p de $]m_p,\infty[$ de sorte que pour tout p, les conditions suivantes soient vérifiées:

(1) $m_{p+1}\in N_p,\ N_{p+1}\subset N_p$,

(2) $\forall n\leqq k(m_p)$, $\Sigma_{|\varphi|=n}\operatorname{Sup}_{m\in N_p} t^2(\varphi,m)\leqq 2a^2$.

Pour cela, on commence avec $N_0=\mathbf{N}$. Si l'on a déjà construit $m_1,\cdots,m_p$; $N_1,\cdots,N_p$ satisfaisant (1) et (2), on choisi m_{p+1} quelconque dans N_p. Il existe alors une partie infinie N_{p+1} de N_p, telle que pour tout $\varphi\in T$ avec $|\varphi|\leqq k(m_{p+1})$, l'ensemble des $t^2(\varphi,m)$ pour $m\in N_{p+1}$ ait un diamètre $\leqq 2^{-k(m_{p+1})}a^2$, ce qui implique la condition (2).

Montrons que pour toute suite (a_p) nulle à partir d'un certain rang, on a

$$\delta\operatorname{Sup}|a_p|\leqq\left\|\sum a_p x_{m_p}\right\|\leqq a\sqrt{3}\operatorname{Sup}|a_p|.$$

La première inégalité est évidente. Fixons n. Soit l le premier entier tel que $n\leqq k(m_l)$. Pour $\psi\in T$, $|\psi|\geqq n$, il existe au plus un entier r tel que $x_{m_r}(\psi)\neq 0$, et on a $r\geqq l$. Il en résulte que si $\varphi\in T$, $|\varphi|=n$, on a

$$\operatorname*{Sup}_{\psi\in T(\varphi)}\left|\sum a_p x_{m_p}(\psi)\right|\leqq\operatorname{Sup}|a_p|\,.\operatorname{Sup}\left(t(\varphi,m_l),\operatorname*{Sup}_{r>l}t(\varphi,m_r)\right).$$

Pour $r>l$, on a $m_r\in N_l$, et la condition (2) implique que

$$\sum_{|\varphi|=n}\operatorname*{Sup}_{r>l}t^2(\varphi,m_r)\leqq 2a^2.$$

Il vient donc

$$\left(\sum_{|\varphi|=n}\left(\operatorname*{Sup}_{\psi\in T(\varphi)}\left|\sum a_p x_{m_p}(\psi)\right|\right)^2\right)^{1/2}\leqq a\sqrt{3}\operatorname{Sup}|a_p|$$

ce qui termine la preuve du théorème 1.

Du résultat précédent on déduit de façon standard:

COROLLAIRE 2. *E' est séparable, et possède la propriété de Schur, c'est-à-dire que les suites de E' qui convergent faiblement vers zéro convergent fortement vers zéro. Ainsi E' donc E possède la propriété* DP.

THÉORÈME 3. *$\mathscr{C}([0,1],E)$ et $L^1(E')$ ne possèdent pas la propriété* DP.

Nous allons en fait montrer que $\mathscr{C}(K,E)$ ne possède pas la propriété DP, où $K=\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, ce qui revient au même puisque ces espaces sont isomorphes. Ecrivons $K=\Pi_{n=1}^{\infty}\{0,1\}^n$. Soit p_n la projection canonique de K sur $\{0,1\}^n$. Pour un élément $\varphi\in T$, soit $e_\varphi\in E$ donné par $e_\varphi(\varphi)=1$, $e_\varphi(\psi)=0$ si $\psi\neq\varphi$, et soit $e'_\varphi\in E$ donné par $e'_\varphi(x)=x(\varphi)$. Posons $f_n(t)=e_{p_n(t)}$; $g_n(t)=e'_{p_n(t)}$ pour $t\in K$. On a $f_n\in\mathscr{C}(K,E)$.

Désignons par λ la mesure canonique de K (mesure de Haar).

On a $g_n\in L^1(\lambda,E')$, $\|g_n\|_1\leqq 1$. On a l'injection canonique I_1 de $\mathscr{C}(K,E)$ dans $L^1(\lambda,E')'$ donnée pour $f\in\mathscr{C}(K,E)$ et $g\in L^1(\lambda,E')$ par

$$I_1(f)(g)=\int g(t)(f(t))d\lambda(t).$$

Soit I_2 la restriction de I_1' à $L^1(\lambda,E')$. On a

$$I_1(f_n)(g_n)=I_2(g_n)(f_n)=1.$$

Pour prouver le théorème il suffit donc d'établir que (f_n) converge faiblement vers zéro dans $\mathscr{C}(K,E)$ et g_n converge faiblement vers zéro dans $L^1(\lambda,E')$.

Preuve que (f_n) converge faiblement vers zéro. Il suffit de montrer que pour des entiers distincts $m_1,\cdots,m_k$, on a $\|\Sigma_{i\leq k}f_{m_i}\|\leqq k^{1/2}$. Fixons t et n. Pour $\varphi\in T$, $|\varphi|=n$, on a

$$\operatorname*{Sup}_{\psi\in T(\varphi)}\left|\sum_{i\leq k}f_{m_i}(t)(\psi)\right|\leqq 1$$

puisque deux des nombres $f_{m_i}(t)(\psi)$ ne sont jamais simultanément non nuls. D'autre part, pour $|\varphi_1|=|\varphi_2|$, $\varphi_1\neq\varphi_2$, les ensembles $T(\varphi_1)$ et $T(\varphi_2)$ sont disjoints. Puisqu'il existe exactement k points ψ de T tels que $\Sigma_{i\leq k}f_{m_i}(t)(\psi)\neq 0$, on a donc

$$\sum_{|\varphi|=n}\operatorname*{Sup}_{\psi\in T(\varphi)}{}^2\left|\sum_{i\leq k}f_{m_i}(t)(\psi)\right|\leqq k$$

ce qui montre que pour $t\in K$, $\|\Sigma_{i\leq k}f_{m_i}(t)\|\leqq k^{1/2}$, et conclu cette partie.

Preuve que (μ_n) converge faiblement vers zéro. Il suffit de prouver qu'il existe des nombres $A(l,k)$ avec $\lim_{k\to\infty}k^{-1}A(l,k)=2^{-1/2}$ et tels que pour tout entier $l<m_1<\cdots<m_k$ on ait

$$\left\|\sum_{i\leq k}\mu_{m_i}\right\|\leqq A(l,k).$$

En effet, si $g \in \mathscr{C}(K,E)''$ est telle que $\|g\| \leqq 1$ et $g(\mu_n) > \alpha > 0$ pour une infinité d'entiers n, on choisi l avec $2^{-l/2} < \alpha$, puis k avec $A(l,k) < \alpha k$, puis $l < m_1 < \cdots < m_k$ avec $g(\mu_{m_i}) > \alpha$ pour $i \leqq k$. On a alors

$$\alpha k < g\Big(\sum_{i \leqq k} \mu_{m_i}\Big) \leqq \Big\|\sum_{i \leqq k} \mu_{m_i}\Big\| \leqq A(l,k) < \alpha k,$$

une contradiction.

LEMME 4. *Soit $A \subset T$ avec $\varphi \in A \Rightarrow |\varphi| \geqq l$. Soit*

$$d = \operatorname*{Sup}_{|\varphi| = l} \operatorname{card}(T(\varphi) \cap A).$$

Alors $\|\Sigma_{\varphi \in A}\, e'_\varphi\| \leqq 2^{l/2} d$.

PREUVE. En effet on peut écrire $A = \bigcup_{i \leqq d} A_i$, où pour $\varphi \in T$, $|\varphi| = l$ on a $\operatorname{card}(T(\varphi) \cap A_i) \leqq 1$. On a puisque $\operatorname{card} A_i \leqq 2^k$;

$$\Big\|\sum_{\varphi \in A_i} e'_\varphi\Big\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqq 1} \Big|\sum_{\varphi \in A_i} x(\varphi)\Big| \leqq 2^{l/2} \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqq 1} \Big(\sum_{\varphi \in A_i} (x(\varphi))^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqq 2^{l/2} \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqq 1} \Big(\sum_{|\varphi| = l} \Big(\operatorname*{Sup}_{\psi \in T(\varphi)} |x(\psi)|\Big)^2\Big)^{1/2} \leqq 2^{l/2}$$

ce qui prouve le lemme.

Pour $f \in \mathscr{C}(K,E)$, $\|f\| \leqq 1$, on a

$$\Big|\sum_{i \leqq k} \mu_{m_i}(f)\Big| \leqq \int_K \Big|\sum g_{m_i}(t)(f(t))\Big|\, d\lambda(t)$$

d'où

$$\Big\|\sum_{i \leqq k} \mu_{m_i}\Big\| \leqq \int_K \Big\|\sum g_{m_i}(t)\Big\|_{E'} d\lambda(t),$$

d'après le lemme, on a donc

$$\Big\|\sum_{i \leqq k} \mu_{m_i}\Big\| \leqq 2^{l/2} \int d_k(t) d\lambda(t)$$

où

$$d_k(t) = \operatorname*{Sup}_{|\varphi| = l} \operatorname{card}\{i \leqq k\,;\, p_{m_i}(t) \geqq \varphi\}.$$

Pour $\varphi \in \{0,1\}^l$, soit h_i^φ donnée par

$$h_i^\varphi(t) = 1 \quad \text{si } \varphi \leqq p_{m_i}(t) \quad \text{et} \quad h_i^\varphi(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

On a donc

$$d_k(t) = \operatorname*{Sup}_{|\varphi|=l} \sum_{i=1}^{k} h_i^{\varphi}(t).$$

Les fonctions h_i^{φ} sont independantes et equidistribuées, et $\int h_i^{\varphi} = 2^{-l}$.

La loi faible des grands nombres implique que $(1/k)\sum_{i=1}^{k} h_i^{\varphi} \to 2^{-l}$ en probabilités. C'est donc aussi le cas de $(1/k)d_k(t)$. Il en résulte que

$$\lim_{k\to\infty} (1/k) \int d_k(t) d\lambda(t) = 2^{-l},$$

ce qui termine la demonstration.

Bibliographie

1. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Can. J. Math. **5** (1953), 129–173.

2. J. Hagler, *A counterexample to several questions about Banach spaces*, Studia Math. **60** (1977), 289–308.

Equipe d'Analyse
Tour 46 — 4ème Etage
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75230 — Paris Cedex 05, France